证明：存在$P,Q$为非奇异的四元数矩阵使得$PXQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ =rank(X),

另一方面，$rank({}_rP_rX_rQ)=4\,rank(X)$。

## 第二节 四元数自共轭矩阵的行列式、特征根及特征根向量

（1）四元数的行列式的定义 1： 由于四元数乘法的不可交换性，四元数矩阵的行列式的定义不能象在实数、复数矩阵的行列式那样定义。目前关于四元数行列式的定义有多种，以下介绍几种常见的定义。

谢邦杰在文[39]中主要是介绍 J. Dieudonne 在体上建立的所谓非交换行列式的理论.

设 C 为四元数 Q 的乘法群*Q 的换位子群(在任意群 G 中，乘积 $aba^{-1}b^{-1}$ 叫做 G 的换位子，G 的所有换位子的一切有限乘积作成 G 的一个正规子群 C，叫做 G 的换位子群。商群$\frac{G}{C}$必为交换群，而且对 G 的正规子群 N 来说，只要$\frac{G}{N}$为交换群，就必有$C\subset N$。)，于是商群*Q / C 为交换群，其元素可记为[a]，[b]，…，其中 a，b，…表 Q 中非 0 元素. 再引进一个新元素[0]并定义它与任何[a]之积为[0]，即

[0][a]＝[a][0]=[0].

于是*Q / C 添进[0]后就构成一个交换的、有单位元素 I 的乘法半群，记为[Q]. 这样一来，Q(作为乘法半群来看)到[Q]上就有一个同态映射 a→[a]；且有[ab]=[a][b]=[b][a]=[ba].

**四元数的行列式的定义 1**：如果对四元数 Q 上每个 n 阶矩阵 A 恒有[Q]中的一个唯一确定的元[a]与之相应；记为[a]＝detA，且使得:

1. 当用λ去左乘 A 的某一行而得到 B 时，就有 detB＝[λ]detA

2. 当把 A 的某行加于另一行而得 B 时，就有 detA＝detB

3. det I＝[1]，

则称 detA 为 A 的行列式.

按上述定义，四元数方阵 A 可由行的初等变换（只须行的消法变换）化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & a_1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & a_k \end{pmatrix}$$

则：$\det A = [a_1]\cdots[a_k]$

**评论**：四元数方阵的行列式通过用四元数矩阵的初等变换化为对角矩阵后来定义，显得自然且计算具有可操作性。

**（2） 四元数（可中心化）矩阵的行列式的定义 2：**

设四元数 Q 上 n 阶矩阵 A 的特征矩阵 $\lambda I - A$ 可由初等变换(唯一地)化为：

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \varphi_1(\lambda) & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \varphi_k(\lambda) \end{pmatrix}, \quad \varphi_1(\lambda)|\cdots|\varphi_k(\lambda)$$

诸 $\varphi_i(\lambda)$ 均为实首项系数为 1 的多项式，则可定义：

$\|A\| = (-1)^{-n} f(0),\ f(\lambda) = \varphi_1(\lambda)\cdots\varphi_k(\lambda)$ 为 A 的行列式。

此时的方阵 A 叫做 Q 上的可中心化矩阵。

**（3） 自共扼四元数矩阵的行列式定义极其性质**

**定理 2.2.1** 对任意非奇异 Hermitian 对称四元数矩阵 ${}_qA = A_r + A_i \cdot i + A_j \cdot j + A_k . k$ 存在 非零实特征值 $\lambda_s \in R$ 及特征向量 ${}_qZ_s$, s=1,2,…,m, 满足:

(1) ${}_qA \cdot {}_qZ_s = \lambda_s \cdot {}_qZ_s$

(2) ${}_qU^* \cdot {}_qA \cdot {}_qU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$，此处 ${}_qU = ({}_qZ_1, {}_qZ_2, \ldots, {}_qZ_m)$，${}_qU$ 为酉矩阵

证明：由定理 ${}_qA \cong {}_rA = \begin{pmatrix} A_r & A_i & A_j & A_k \\ -A_i & A_r & -A_k & A_j \\ -A_j & A_k & A_r & -A_i \\ -A_k & -A_j & A_i & A_r \end{pmatrix}$，

其中 ${}_rA$ 实对称 $4m\times 4m$ 矩阵，它的特征根为 $u_1, u_2, \ldots, u_{4m}$，且矩阵 $P_{4m\times 4m} = [P_1, P_2, \ldots, P_{4m})$，$P_s$ 是 ${}_rA$ 对应于特征根 $u_s$ 的特征向量，即：${}_rAP_s = u_s P_s$. $s = 1, 2, \ldots 4m$.

把 $P_1$ 分块，$P_1 = \begin{bmatrix} Y_r \\ -Y_i \\ -Y_j \\ -Y_k \end{bmatrix}$. 其中 $Y_r, Y_I, Y_j, Y_k$ 为 $m\times m$ 实矩阵，

构造：$Y_1 = \begin{bmatrix} Y_r \\ -Y_i \\ -Y_j \\ -Y_k \end{bmatrix}, Y_2 = \begin{bmatrix} Y_i \\ Y_r \\ Y_k \\ -Y_j \end{bmatrix}, Y_3 = \begin{bmatrix} Y_j \\ -Y_k \\ Y_r \\ Y_i \end{bmatrix}, Y_4 = \begin{bmatrix} Y_k \\ Y_j \\ -Y_i \\ Y_r \end{bmatrix}$，

有 ${}_qZ = Y_r + Y_i \cdot i + Y_j \cdot j + Y_k . k \cong {}_rZ = Y = [Y_1, Y_2, Y_3, Y_4]$，

因为 $Y_1 = P_1$，有 ${}_rAY_1 = u_1 Y_1$，${}_rAY_2 = u_1 Y_2$，${}_rAY_3 = u_1 Y_3$，${}_rAY_4 = u_1 Y_4$. 则根据定理 2.1.1，有 ${}_qA{}_qZ = u_1 {}_qZ$，即 ${}_qZ$ 是 Hermitian 矩阵 ${}_qA$ 的特征值 $u_1$ 对应的特征向量。

令 ${}_qZ_1 = {}_qZ$，$P_s = Y_s$，$s = 1, 2, 3, 4$；$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \lambda_1$，不妨设 $u_5 \neq u_1$.

我们重复上述过程可得：${}_qA$ 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 对应的特征向量 ${}_qZ_1, {}_qZ_2, \ldots, {}_qZ_m$ 因为 P 可以取成正交阵，$U = [{}_qZ_1, {}_qZ_2, \ldots, {}_qZ_m] \cong P$，即：$U^*U = I$，满足：${}_qU^* \cdot {}_qA \cdot {}_qU = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$. ■

**推论 2.2.1** 若 ${}_qA$ 是一个四元数 Hermitian 矩阵，则：它的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 全为正实数，且存在一个四元数 Hermitian 矩阵，记为 ${}_qA^{1/2}$ 满足：${}_qA = {}_qA^{1/2} \cdot {}_qA^{1/2}$ .

证明：略.

**推论2.2.2** ${}_qA$，${}_qB$ 是两个四元数Hermitian矩阵，且成积可交换，则：存在一个非奇异的四元数矩阵 ${}_qL$ 同时满足：${}_qL^{*}\cdot{}_qA\cdot{}_qL=I$，${}_qL^{*}\cdot{}_qB\cdot{}_qL=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$，此处 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ 为实数.

**证明：略.**

定义 2.2.1 若 ${}_qA$ 是一个四元数 Hermitian 矩阵，则 ${}_qA$ 的<u>行列式</u>定义为：$|{}_qA|=\lambda_1\cdots\lambda_m$，此处 $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ 为 ${}_qA$ 的特征值。

性质2.2.1 若 ${}_qA$ 是一个四元数Hermitian矩阵，${}_qA\cong{}_rA$，则：

$(\det{}_qA)^4=\det({}_rA)$

证明：因为 ${}_qA$ 是一个四元数Hermitian矩阵，由定理2。1。1，存在酉矩阵 ${}_qU$，使 ${}_qU^*\cdot{}_qA\cdot{}_qU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$，由定理1。2。1有：

${}_rU^*\cdot{}_rA\cdot{}_rU=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m,)$. 由此可见 $(\det{}_qA)^4=\det({}_rA)$。

性质2.2.2 设A，B 皆为Hermitian四元数矩阵，则：

$\det(MBM^*)=\det(A)\cdot\det(B)$，M为非奇异且满足 $A=M^*M$.

证明：因为 $\det(A)>0,\det(B)>0$,及 $\det(MBM^*)>0$,

$A={}_qA\cong{}_rA$, $M={}_qM\cong{}_rM$, 及 $B={}_qB\cong{}_rB$,

所以有：$\det({}_rM{}_rB{}_rM^*)=\det({}_rA)\cdot\det({}_rB)$

$$=\{\det({}_qA)\det({}_qB)\}^4=\{\det(A)\det(B)\}^4$$

又因为 $\det({}_rM{}_rB{}_rM^*)=\{\det({}_qM_qB_qM^*)\}^4=\{\det(MBM^*)\}^4$

比较上两式可得证明。

定理 2. 2. 2 设 ${}_qA\in Q^{m\times m}$ 是自共轭四元数矩阵，则存在对角线为正数的上三角矩阵 ${}_qT\in Q^{m\times m}$，

$$ {}_{q}T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{mm} \end{pmatrix} $$，满足：${}_{q}A={}_{q}T^{*}.\,{}_{q}T$ .

**自共轭行列式性质2.2.3:** 如果 $H=T^{*}.T$ ,此处T处是对角线为正数的上三角矩阵 $t_{ss}>0, s=1,2,\ldots,m$. 则：: $\det(H)=\det(T^{*}T)=\prod_{l=1}^{m} t_{ll}^{2}$

**证明:** 显然，$\det(T^{*}T)=\det(H)>0.$，由于 $T={}_{q}T\cong{}_{r}T$ 及 $H={}_{q}H\cong{}_{r}H$ ,所以有：${}_{r}H={}_{r}T'\,{}_{r}T$ 及 $\det({}_{r}H)=\det({}_{r}T'\,{}_{r}T)$.

又因为 $\det({}_{r}T)=\prod_{l=1}^{m} t_{ll}^{4}$ , $\det({}_{r}H)=\det({}_{r}T'\,{}_{r}T)=\prod_{l=1}^{m} t_{ll}^{8}$ .

所以由性质2.2.1得：$\det(H)=\det({}_{q}H)=\det({}_{r}H)^{\frac{1}{4}}=\prod_{l=1}^{m} t_{ll}^{2}$ 证毕。

## 第三节 本章小结与评论

近二十年来，特别在我国就代数学领域，对四元数的研究，特别是四元数矩阵论的研究，已经成为一个研究热点，新的结果很多，需要指出的是这一章中仅把在本论文中所涉及的四元数矩阵代数的有关结果作一个汇总。

本章给出了四元数的三个定义，四元数的共扼、模、逆、Frobenius定理、四元数矩阵（向量）空间的定义、四元数矩阵代数（加法"+"和乘法". "，数乘，转置" ′ "和共轭转置"*",方阵的逆及方阵的迹等运算。）并注意列出它们与实矩阵运算所不同的地方，建立了四元数矩阵与实矩阵的同构关系（定理2.1.1及定理2.1.2），讨论了四元数矩阵的初等变换与矩阵的秩，给出了四元数矩阵的秩与实矩阵的秩的关系（定理），总结了四元数的行列式的定义，重点讨论了自共轭矩阵的性质，行列式的定义、特征根及特征根向量极其与实矩阵的关系。

这一章需要特别指出下列几点：