第二章 四元数矩阵代数的一些结果

本章给出了四元数的三个定义，四元数的共扼、模、逆、Frobenius 定理、四元数矩阵（向量）空间的定义、四元数矩阵代数（加法“+”和乘法“.”，数乘，转置“ ′ ”和共轭转置“*”，方阵的逆及方阵的迹等运算。）并注意列出它们与实矩阵运算所不同的地方，建立了四元数矩阵与实矩阵的同构关系（定理 2.1.1 及定理 2.1.2），讨论了四元数矩阵的初等变换与矩阵的秩，给出了四元数矩阵的秩与实矩阵的秩的关系（定理），总结了四元数的行列式的定义，重点讨论了自共轭矩阵的性质，行列式的定义、特征根及特征根向量极其与实矩阵的关系。

第一节 四元数线性（矩阵）空间，四元数矩阵代数运算及其性质

1 四元数的定义

定义 2.1.1：复数域上所有这样的矩阵

$$\begin{pmatrix} a+b\sqrt{-1} & c+d\sqrt{-1} \\ -c+d\sqrt{-1} & a-b\sqrt{-1} \end{pmatrix}$$

对矩阵的加法和乘法来说作成一个体而非域。如果令：

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, i=\begin{pmatrix} \sqrt{-1} & 0 \\ 0 & \sqrt{-1} \end{pmatrix}, j=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, k=\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix}，则有：$$

$$i\cdot j=-j\cdot i=k, j\cdot k=-k\cdot j=i, k\cdot i=-i\cdot k, i^2=j^2=k^2=-I。$$

因此，此体也可以抽象地定义如下：设 i, j, k 是三个文字并规定其乘法运算如上，但易-I 为-1，于是有如下代数集合：

定义 2.1.2

集合 $Q=\{q|q=x_r+x_i\cdot i+x_j\cdot j+x_k\cdot k\ \ ,i^2=j^2=k^2=-1, i\cdot j=-j\cdot i=k,$
$j\cdot k=-k\cdot j=i, k\cdot i=-i\cdot k=j,$ 其中 $x_r,x_i,x_j,x_k\in R, x_r,x_i,x_j,x_k$ 称为 X 的实分量$\}$

易证，Q对“+”，“.”成为一个非交换可除环称为四元数体.。

给定任意一个四元数 $q = x_r + x_i \cdot i + x_j \cdot j + x_k \cdot k$,定义$X$的共轭数为:

$$\bar{q} = x_r - x_i \cdot i - x_j \cdot j - x_k \cdot k$$

$\forall p, q \in Q$,有$\overline{p+q} = \bar{p} + \bar{q}, \overline{p \cdot q} = \bar{p} \cdot \bar{q}$,并且,如果$\bar{q} = q$,当且仅当$q$为实数。

q 的模为:$\|q\| = (\bar{q}q)^{\frac{1}{2}} = x_r^2 + x_i^2 + x_j^2 + x_k^2$,

四元数的模有以下性质:(1)$\|q\| \ge 0$,等号成立当且仅当$q = 0$

(2) 对四元数乘积来说,有:$\|q_1 \cdot q_2\| = \|q_1\| \cdot \|q_2\|$

(3) $\|\alpha + \beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$

若$q \ne 0, q^{-1} = \dfrac{\bar{q}}{\|q\|}$

四元数还有以下等价定义:

定义2.1.3:四阶实方阵:$\begin{pmatrix} x_r & x_i & x_j & x_k \\ -x_i & x_r & -x_k & x_j \\ -x_j & x_k & x_r & -x_i \\ -x_k & -x_j & x_i & x_r \end{pmatrix}$,其中$x_r, x_i, x_j, x_k$为任意实数。在矩阵的加法和乘法运算下成为一个体。

此处,令$I \equiv \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{bmatrix}$, $i \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $j \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $k \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,此处仍有:$i^2 = j^2 = k^2 = -1, i \cdot j = -j \cdot i = k, j \cdot k = -k \cdot j = i, k \cdot i = -i \cdot k = j$

所以,四阶实方阵:$\begin{pmatrix} x_r & x_i & x_j & x_k \\ -x_i & x_r & -x_k & x_j \\ -x_j & x_k & x_r & -x_i \\ -x_k & -x_j & x_i & x_r \end{pmatrix} = x_r \cdot I + x_i \cdot i + x_j \cdot j + x_k \cdot k$.

容易证明，以上四元数的三个定义是等价的。我们在本论文中更倾向于第三个定义。因为可把四元数嵌入4阶实方阵中，这样--来，可用处理实矩阵的方法去研究四元数。

Frobenius 定理　在实数域上，实数域与复数域是仅有的无零因子的有限维交换代数；四元数体是唯一的无零因子的有限维非交换代数。

证明：见文[67]p344-351.

注：（1）实数域、复数域与四元数体的子空间同构。

（2）Frobenius 定理奠定了四元数在代数学研究中的重要地位。

2、四元数线性（矩阵）空间的定义

Q上的所有$m\times n$四元数矩阵集合$Q^{m\times n}=\{X|X=X_r+X_i\cdot i+X_j\cdot j+X_k\cdot k$，其中$X_r$，$X_i$，$X_j$，$X_k\in R^{m\times n}\}$ 记：$Re(X)=X_r$称为X的实部，X_i，X_j，X_k称为X的虚部。

定义：设$Q\times Q^{m\times n}$到$Q^{m\times n}$一个运算（叫Q中元素b与$Q^{m\times n}$中元素A的纯量乘法，其积记为$b\cdot A$使得：

（1）$b\cdot(A+B)=b\cdot A+b\cdot B$

(2) $(a+b)\cdot A=a\cdot A+b\cdot A$

(3) $(ab)\cdot A=a(b\cdot A)$

(4) $1\cdot A=A$

则称$Q^{m\times n}$是Q上的一个（右）向量空间。

类似域上的向量空间一样，可定义$Q^{m\times n}$的(右)线性相关和(右)线性无关及$Q^{m\times n}$的(左)线性相关和(左)线性无关.值得注意的是，$Q^{m\times n}$的(右)线性无关与(左)线性无关并不等价.

例如:$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}\cdot j+\begin{pmatrix}-j\\-k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$,即:$\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$,$\begin{pmatrix}-j\\-k\end{pmatrix}$右线性相关，但它们却是左线性无关的.

同样，我们可给出(右)生成子空间的定义，及$Q^{m\times n}$的(右)基的定义.

3 四元数矩阵代数运算及其性质

类似复数域的情形，我们可以在$Q^{m\times n}$上定义加法“+”和乘法“.”，数乘，转置“ ′ ”、共轭“ ¯ ” 共轭转置“*”,方阵的逆及方阵的迹等运算。

值得注意的是：

（1）由于四元数乘法的不可交换性，数乘运算左乘与右乘并不相等。

（2）四元数的矩阵乘积的转置公式：$(AB)'=B'A'$ 并不成立。

例如：（i）$A=(i,j), b=k, bA=(j,-i)\neq Ab=(-j,i)$

（ii）令 $A=(i,j), B=\begin{pmatrix}k\\1\end{pmatrix}, (AB)'=0, B'A'=2j\neq 0$。

但是仍然有：$(AB)^*=B^*A^*$

⑶设A是Q上一个n阶矩阵.如果有Q上一个n阶矩阵存在,使:
$AB=BA=I_n$ (单位矩阵)，则说A是Q上的一个非奇异矩阵或可逆矩阵.易知,当A可逆时，A的逆矩阵是唯一的,记A^{-1},且$(A^{-1})^{-1}=A$.

当$A_1,A_2,\dots,A_m$均为Q上的可逆矩阵时其乘积也为可逆的且有：

$$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1},\ (A^{-1})^*=(A^*)^{-1}$$

注：（i）若四元数矩阵A可逆，且k为任意非零四元数，则：

$$(kA)^{-1}=A^{-1}\cdot k^{-1}\neq(Ak)^{-1}=k^{-1}\cdot A^{-1}$$

（ii）若四元数矩阵A可逆，则A'、$\bar{A}$未必可逆。

例如：二阶四元数矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & i\\ -j & -k\end{pmatrix}$可逆，但A'、$\bar{A}$不可逆。

（iii)但是仍有：若四元数矩阵A可逆，则A* 可逆。

若四元数矩阵A满足：$A=A^*$，则称A为自共轭的（或Hermitian）。

定理2.1.1 映射$T:Q^{m\times n}\to R^{4m\times 4n}$ $\forall X=x_r+x_i\cdot i+x_j\cdot j+x_k\cdot k\in Q^{4m\times 4n}$，

$$T(X)=\begin{pmatrix} x_r & x_i & x_j & x_k \\ -x_i & x_r & -x_k & x_j \\ -x_j & x_k & x_r & -x_i \\ -x_k & -x_j & x_i & x_r \end{pmatrix}\equiv {}_rX$$，映射T为$Q^{m\times n}$到$R^{4m\times 4n}$的子环的同构. 即:

(1) $\forall X,Y\in Q^{m\times n}, T(X+Y)={}_rX+{}_rY$

(2) $\forall X\in Q^{m\times n}, Y\in Q^{n\times p}$,则$T(X\cdot Y)={}_rX\cdot{}_rY$

且$T(.)$为单映射.

证明:略.

注：这个定理很重要,它是我们把四元数的研究转化为实矩阵的研究,得出结果后,再返回四元数,这种处理方法将在本文中经常遇到.

推论 2.1.1 对定理 2.1.1 中的同构映射来说，有:

(1) $\forall X\in Q^{m\times n}, T(X^*)={}_rX'$

(2) $\forall X,Y\in Q^{m\times n}, T((X\cdot Y)^*)=T(Y^*X^*)={}_rY'\cdot{}_rX'$

(3) $\forall X\in Q^{m\times n}, T(X^{-1})={}_rX^{-1}$,

(4) $X\in Q^{m\times m}$为自共轭的,则$T(X)$实对称的.

说明:（i)由（1）（2）可得若四元数矩阵 A 可逆，则 A* 可逆。

（ii）由(3)可得：四元数A的逆矩阵的计算，可先求${}_rA$的逆,然后，利用同构对应的唯一性再返回到A.

$\forall X\in Q^{m\times n}$, X的迹定义为: $tr(X)\equiv\sum_{k=1}^{n} x_{kk}$,矩阵的迹有下列性质:

(1)$tr(X+Y)=tr(X)+tr(Y)$

(2)$\forall c\in Q, tr(c\cdot X)=c\cdot tr(X)$

但是,由于四元数乘法的不可交换性,在实数,复数情况下成立的如下式子:

$tr(X\cdot Y)=tr(Y\cdot X)$,在四元数情况下不成立.

例如:一阶矩阵下, $tr(i\cdot j)=k\neq tr(j\cdot i)=-k$.

但是，关于四元数矩阵的迹，我们在本论文中经常需要如下定理：

定理 2.1.2 对任意两个 m 阶四元数方阵来说，有：

$$\operatorname{Re} tr(AB) = \operatorname{Re} tr(BA)$$

证明：$\operatorname{Re}(tr(AB)) = tr(\operatorname{Re}(AB)) = \frac{1}{4} tr({}_r(AB)) = \frac{1}{4} tr({}_r(A) \cdot {}_r(B))$

$$= \frac{1}{4} tr({}_r(B) \cdot {}_r(A)) = \frac{1}{4} tr({}_r(BA)) = tr(\operatorname{Re}(BA)) = \operatorname{Re}(tr(BA))$$

说明：上式第二个等式利用了定理 2.1.1 中四元数矩阵的实部迹与它的同构实矩阵的迹的关系。上式第三个等式利用了定理 2.1.1 中四元数矩阵的实部乘积与它的同构实矩阵的实部乘积的关系。上式第四个等式利用实矩阵乘积的迹的交换性。证毕。

$\forall X \in Q^{m\times n}$，定义范数：$\|X\| = [tr(X^* \cdot X)]^{\frac{1}{2}}$，此处 X^* 指矩阵 X 的共轭转置.

易知:

(1) $\|X\| \ge 0$, 且 $\|X\| = 0$, 当且仅当 $X = 0$(零矩阵)

(2) $\forall \alpha \in \mathrm{Q}, \forall X \in \mathrm{Q}^{m\times n}$, 有 : $\|\alpha X\| = \|\alpha\| \cdot \|X\|$

(3) $\forall X, Y \in \mathrm{Q}^{m\times n}$, 有 : $\|X + Y\| \le \|X\| + \|Y\|$, .

且等号成立的充要条件为: X, Y线性相关

这样使 $\mathrm{Q}^{m\times n}$ 成为度量空间，能建立相应的拓扑结构，且 $\mathrm{Q}^{m\times n}$ 与 $\mathrm{R}^{4m\times n}$ 是同胚的。即 $\mathrm{Q}^{m\times n}$ 可作为 4m×n 维流形，可以在此基础上定义 $\mathrm{Q}^{m\times n}$ 在每一点处的切空间、微分空间（余切空间）、相应的外微分式， 并且可定义流形上的外微分及积分。见陈省身，陈维恒文[67]。

推论 1.2.2 $\forall X \in \mathrm{Q}^{m\times n}, \|X\| = [tr(X^* \cdot X)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}[tr({}_r X^{\cdot} \cdot {}_r X)]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\|{}_r X\|$

证明：上式第二个等式利用了定理 2.1.1 中四元数矩阵的实部迹与它的同构实矩阵的迹的关系.

4 四元数矩阵的初等变换与矩阵的秩

类似域上的情形，可以定义四元数矩阵的初等变换与初等矩阵. 稍有不同的是：对行的初等变换应该是:把某行的左 λ 倍加于另一行; 用非 0 的 λ 左乘某行. 对列的初等变换应该是: 把某列的右 λ 倍加于另一列; 用非 0 的 λ 右乘某列.

$\forall X \in Q^{m\times n}$, X的m 个行向量的所有左线性组合作成一个左向量空间，其维数称为 X 的行左秩数。同理可定义的列右秩数。X 中的最大的非奇异子块的阶数称为 X 的秩。

定理 2.1.3 四元数矩阵的行左秩数，列右秩数等于其秩数。四元数矩阵初等变换不改变矩阵的秩。

推论 2.1.2 秩X = 秩PX = 秩XQ = 秩PXQ其中P,Q为非奇异的.。

推论 2.1.3 秩$X = r$的充要条件为：存在非奇异矩阵P,Q使：$PXQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

推论 2.1.4 秩$AB \le$ 秩A, 秩$AB \le$ 秩B

命题 1 如果 n 阶四元数 A 矩阵适合 $A^2=A$, 则秩 A+秩(I−A)=n

命题 2 (Cochran 定理在四元数矩阵上的推广) 设 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ 为非 0 的 n 阶矩阵,A 为它们的和, 如果:$A^2=A$,秩 A=$\sum_{i=1}^{k}$秩 A_i, 则: $A_iA_j=O$(零矩阵)($i\neq j$); $A_i^2=A_i$, ($i=1,\ldots,k$).

以上结果参见文[39]p300~312.

对于四元数矩阵的秩的定义, 现我们利用推论 2.2.1 可得更简便的定义和计算方法:

定理 2.1.3　$\forall X \in Q^{m\times n}, rank(X) = \dfrac{1}{4} rank(_rX)$.

证明：存在P,Q为非奇异的四元数矩阵使得$PXQ=\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$=*rank(X)*,

另一方面，$rank({}_rP_r X_r Q)=4\,rank(X)$。

第二节 四元数自共轭矩阵的行列式、特征根及特征根向量

（1）四元数的行列式的定义 1： 由于四元数乘法的不可交换性，四元数矩阵的行列式的定义不能象在实数、复数矩阵的行列式那样定义。目前关于四元数行列式的定义有多种，以下介绍几种常见的定义。

谢邦杰在文[39]中主要是介绍 J. Dieudonne 在体上建立的所谓非交换行列式的理论.

设 C 为四元数 Q 的乘法群*Q 的换位子群(在任意群 G 中，乘积 $aba^{-1}b^{-1}$ 叫做 G 的换位子，G 的所有换位子的一切有限乘积作成 G 的一个正规子群 C，叫做 G 的换位子群。商群$\dfrac{G}{C}$必为交换群，而且对 G 的正规子群 N 来说，只要$\dfrac{G}{N}$为交换群，就必有$C\subset N$。)，于是商群*Q / C 为交换群，其元素可记为[a]，[b]，…，其中 a，b，…表 Q 中非 0 元素. 再引进一个新元素[0]并定义它与任何[a]之积为[0]，即

[0][a]=[a][0]=[0].

于是*Q / C 添进[0]后就构成一个交换的、有单位元素 I 的乘法半群，记为[Q]. 这样一来，Q(作为乘法半群来看)到[Q]上就有一个同态映射 a→[a]；且有[ab]=[a][b]=[b][a]=[ba].

四元数的行列式的定义 1：如果对四元数 Q 上每个 n 阶矩阵 A 恒有[Q]中的一个唯一确定的元[a]与之相应；记为[a]=detA，且使得：

1. 当用λ去左乘 A 的某一行而得到 B 时，就有 detB=[λ]detA
2. 当把 A 的某行加于另一行而得 B 时，就有 detA=detB
3. det I=[1],